数分期末复习

Chapter 16.

内积 $\xrightarrow{\text{诱导}}$ 范数 $\xrightarrow{\text{诱导}}$ 度量

定理

范数 $\|\cdot\|$ 可由内积诱导 ⇔ 满足平行四边形法则

Cauchy 列与完备性

若 Cauchy 列在空间内收敛，称完备.

定理

$(\mathbb{R}^n, l_p)$ 是 Banach 空间

证明： $l_p = \{(x_1, x_2, \cdots) \mid \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty\}$

$d(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^p\right)^{1/p}$，若 $p=\infty$，显然，下设 $p<\infty$

○首先证明：对于 $\{x^n\}$ 是 Cauchy 列，x^n 每个分量收敛

$\forall \varepsilon, \exists N, \forall m,n>N$, s.t. $d(x^m, x^n) < \varepsilon$,

$|x_k^m - x_k^n|^p \le \sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^p < \varepsilon^p$, $|x_k^m - x_k^n| < \varepsilon$,

故 $\{x_k^n\}_{n=1,2,\cdots}$ 是 $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ 中 Cauchy 列，故收敛于 x_k

记 $x = (x_1, x_2, \cdots)$

○再证明：$\|x^n\|_p$ 有界，$\exists N, \forall n>N$, $d(x^n, x^N) < 1$

$\|x^n\| \le \|x^N\|+1$，记 $M = \max\{\|x^1\| \cdots \|x^{N-1}\|, \|x^N\|+1\}$

$\|x^n\|_p \le M$

。再证明：$x \in l_p$，

$(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p)^{1/p} \le (\sum_{k=1}^{n}|x_k - x_k^m|^p)^{1/p} + (\sum_{k=1}^{n}|x_k^m|^p)^{1/p}$

$\forall m$ 成立，固定 n，$m \to \infty$，

$(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p)^{1/p} \le M$

。最后证明：$x^n \xrightarrow{l_p} x$

由 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N_1$，$\forall m,n>0$，$(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k^m - x_k^n|^p)^{1/p} < \varepsilon/2$

固定 m，$\exists N_2$，s.t.

$(\sum_{k=N_2+1}^{\infty}|x_k^m|^p)^{1/p} < \varepsilon/2$

$(\sum_{k=N_2+1}^{\infty}|x_k^n|^p)^{1/p} < (\sum_{k=N_2+1}^{\infty}|x_k^n - x_k^m|^p)^{1/p} + (\sum_{k=N_2+1}^{\infty}|x_k^m|^p)^{1/p}$

$< \varepsilon$，

故 $\exists N > N_1$，$\forall n > N$，

$(\sum_{k=N_0+1}^{\infty}|x_k^n|^p)^{1/p} < \varepsilon$ 且 $|x_k^n - x_k| < \frac{\varepsilon}{N_0^{1/p}}$，

其中，$N_0 > N_2$ s.t. $(\sum_{k=N_0+1}^{\infty}|x_k|^p)^{1/p} < \varepsilon$

$d(x_n, x) \le$

$(\sum_{k=1}^{N_0}|x_k^n - x_k|^p + [(\sum_{k=N_0+1}^{\infty}|x_k^n|^p)^{1/p} + (\sum_{k=N_0+1}^{\infty}|x_k|^p)^{1/p}]^p)^{1/p}$

$< (\varepsilon^p + (2\varepsilon)^p)^{1/p} = (1+2^p)^{1/p}\varepsilon$

故 $d(x_n, x) \to 0$，$n \to \infty$，□

结论

1、($\mathcal{C}[a,b]$，l_∞) 是完备度量空间

2、$A\in\mathbb{R}^{m\times n}$，$\|\cdot\|$ 是 $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}^m$ 上的Euclid范数

$\|A\| = \sup\limits_{\|x\|} \|Ax\|$ 是范数，

$\|A\|^2$ 为 A^TA 最大特征值

度量空间的拓扑

(M,d) 是度量空间，$B_r(x) = \{y\in M: d(x,y)<r\}$

$\mathcal{B} = \{B_r(x)\}$ 诱导的拓扑

聚点 $x\in E$，$\forall U$ 开，$x\in U$，$(U/\{x\})\cap E\neq\phi$，记为E'

孤立点 $x\in E$，x不是E的聚点

闭包 $\bar{E} = E\cup E' = \bigcap\limits_{\substack{E\subset C\\ C闭}} C$

内部 $E^\circ = \bigcup\limits_{\substack{U\subset E\\ U开}} U$

边界 $\partial E = \bar{E} - E^\circ$

定理 E闭 $\Leftrightarrow E=\bar{E} \Leftrightarrow E'\subset E \Leftrightarrow E^c$开

定理 完备度量空间子集完备 ⟺ 子集闭.

定理 度量空间有可数基.

定理 完备度量空间中列紧 ⟺ 紧致

“$\Rightarrow$”

1. 列紧 $\Rightarrow$ 完全有界

若$\exists\varepsilon_0$，不存在有限ε_0-网，

则对于 $x_1\cdots x_n$ 已确定，$d(x_i,x_j)>\varepsilon_0$，$\forall i\neq j$

$\exists\, x_{n+1}$，$d(x_{n+1},x_i)>\varepsilon_0$，$\forall\, i=1,2,\cdots,n$

否则，$\{x_1 \cdots x_n\}$ 是 ε_0 网

这样构造的 $\{x_n\}$ 必无极限点

故 $\forall \varepsilon$，存在有限 ε-网（完全有界）

2、完全有界 ⇒ 可数基 ⇒ 可数覆盖

$\mathcal{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{B_{\frac{1}{n}}(x) : x \in \{有限\ \tfrac{1}{n}\text{-}网\}\}$ 可数

3、可数覆盖 + 列紧 ⇒ 有限覆盖

$E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$，记 $F_n = (\bigcup_{i=1}^{n} A_i)^c$，$x_n \in F_n / F_{n+1}$

$x_0 \in \{x_n\}'$，$x_m \in F_n$，$\forall m > n$，故 $x_0 \in F_n$

$\forall n$，$x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \phi$，矛盾，

故 $\exists N$，$\forall n > N$，$F_n = F_{n+1} = \phi$，故 $A_1 \cdots A_N$ 覆盖 E.

"⇐"

若 $\{x_n\}' = \phi$，则 $\forall x \in E$，$\exists U_x$ 开，$x \in U_x$，

$(U_x / \{x\}) \cup \{x_n\} = \phi$，$\mathcal{A} = \{U_x : x \in E\}$

$\mathcal{A}$ 不能有限覆盖，

注： 紧致 ⇔ 列紧 + 完全有界

$\mathbb{R}^n$ 的子集紧 ⇔ 有界且闭

定理 U 是紧度量空间，$E \subset U$，E 紧 ⇔ E 闭

连续函数

$f: U \to V$ 连续，iff $\forall N \in V$，N 开，$f^{-1}(N)$ 开

⇔ $\forall N \in V$，N 闭，$f^{-1}(N)$ 闭

⇔ $x_0 \in U$，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta$，$d(x_0, x) < \delta$ 有 $d(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$

⟺ U中任意收敛列$\{x_n\}$，$\{f(x_n)\}$收敛

定理 $f: U \to V$ 连续，满射，U紧，则V紧

压缩映射原理

$\varphi: M \to M$ 为M上压缩映射，iff $\exists\ r \in (0,1)$，

$d(\varphi(x), \varphi(y)) \le r\, d(x,y)$

定理

M完备，$f: M \to M$ 是压缩映射，则有唯一不动点

例 $E \subset \mathbb{R}^n$ 紧，$f: E \to E$，$d(f(x), f(y)) < d(x,y)$，
f有唯一不动点

对于 $\{f^{(n)}(x)\}$，易知 $d(f^{(n+1)}(x), f^{(n)}(x))$ 有极限，设为c

由列紧性，$\exists\ k_n$ $\lim\limits_{n\to\infty} f^{(k_n)}(x) = x_0 \in E$

易得 $d(x_0, f(x_0)) = \lim\limits_{n\to\infty} d(f^{(k_n)}(x), f^{(k_n+1)}(x)) = c$

$d(f(x_0), f^{(2)}(x_0)) = \lim\limits_{n\to\infty} d(f^{(k_n+1)}(x), f^{(k_n+2)}(x)) = c$

故 $c=0$

连通 & 弧连通

1、M连通，若$\exists$ A、B开，无交，$M = A \cup B$

2、M弧连通，若 $\forall\ x, y \in M$，$\exists\ \lambda: [0,1] \to M$，连续，s.t.
$\alpha(0) = x$，$\lambda(1) = y$

定理：

$f: M \to \mathbb{R}$，M弧连通，$a, b \in f(M)$，$a < b$，$\forall\ c \in (a,b)$，
$\exists\ x \in M$，$f(x) = c$

$f(x_1) = a$，$f(x_2) = b$，$\lambda: [0,1] \to M$，$\lambda(0) = x_1$，$\lambda(1) = x_2$

考虑 $f \circ a$

定理

$f: M \to N$，连续满射，M 连通 \ 弧连通，则 N 连通 \ 弧连通.

定理

弧连通 ⇒ 连通

若 E 不连通，取 A, B 无交，开，$E = A \cup B$

$a \in A$，$b \in B$，$\lambda: [0,1] \to E$，$\lambda(0) = a$，$\lambda(1) = b$

$\lambda^{-1}(A)$，$\lambda^{-1}(B)$ 开，$[0,1] = \lambda^{-1}(A) \cup \lambda^{-1}(B)$，得矛盾

例 1. $\mathbb{R}^2$ 的字典序拓扑 $((a,b),(c,d))$ 连通但不弧连通

2. $\{(x,y): 0 < |x| \le 1,\ y = \sin\frac{1}{x}\} \cup \{(0,y): |y| \le 1\}$

定理

A 是 $\mathbb{R}^n$ 开子集，则

$$A \text{ 连通} \Leftrightarrow A \text{ 弧连通}$$

若 A 连通，对 $x_0 \in A$，记 $\widehat{A}(x_0) = \{x: x, x_0 \text{ 间有道路}\}$，则

1° $\widehat{A}(x_0)$ 开

2° $\forall\ x \in A / \widehat{A}(x_0)$，若 $\exists\ B_r(x) \cap \widehat{A}(x_0) \neq \phi$，得矛盾

故 $A / \widehat{A}(x_0)$ 开

$\Rightarrow \widehat{A}(x_0) = A$，$\forall x_0$

Chapter 17

线性映射

1° $\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$，则 $\|\mathcal{A}\| \left(= \sup\limits_{x\neq 0}\left\{\frac{|\mathcal{A}(x)|}{|x|}\right\}\right) < \infty$，且一致连续

2° $\|\mathcal{A}+\mathcal{B}\| \le \|\mathcal{A}\| + \|\mathcal{B}\|$，$\|c\mathcal{A}\| = |c|\cdot\|\mathcal{A}\|$

3° $\|\mathcal{B}\circ\mathcal{A}\| \le \|\mathcal{B}\|\cdot\|\mathcal{A}\|$

定理

$\Omega = \{\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^n) : \mathcal{A}$ 可逆$\}$

1° $\mathcal{A} \in \Omega$，$\mathcal{B} \in L(\mathbb{R}^n)$，$\|\mathcal{B}-\mathcal{A}\|\cdot\|\mathcal{A}^{-1}\| < 1$，则 $\mathcal{B} \in \Omega$

记 $\alpha = 1/\|\mathcal{A}^{-1}\|$，$\beta = \|\mathcal{B}-\mathcal{A}\|$，$\beta < \alpha$，

$\forall x \in \mathbb{R}^n$，$\alpha|x| \le \alpha\|\mathcal{A}^{-1}\|\cdot|\mathcal{A}(x)| = |\mathcal{A}(x)|$

$\le |(\mathcal{A}-\mathcal{B})x| + |\mathcal{B}(x)| \le \beta(x) + \mathcal{B}(x)$

$\Rightarrow |\mathcal{B}(x)| \ge (\alpha-\beta)|x| \Rightarrow x \neq 0$ 时 $\mathcal{B}(x) \neq 0$.

2° Ω 是 $(L(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|)$ 的开集，$\mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}^{-1}$ 是 Ω 到自身的连续映射、

$\|\mathcal{A}^{-1} - \mathcal{B}^{-1}\| \le \|\mathcal{A}^{-1}\|\cdot\|\mathcal{A}-\mathcal{B}\|\cdot\|\mathcal{B}^{-1}\|$

定理

$\mathcal{A}(t) = (a_{ij}(t))$ 是 (a,b) 到 $\mathbb{R}^{m\times n}$ 的映射，$\mathcal{A}(t)$ 连续

$\Longleftrightarrow$ $a_{ij}(t)$ 连续 $\forall i,j$

可微映射

$M \subset \mathbb{R}^n$，$f: M \to \mathbb{R}^m$，$x \in M$，

若∃ $L_x \in L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$，$\forall y \in M$，有

$f(y)-f(x) = L_x(y-x) + R(x,y)$ 且 $\lim\limits_{|y-x|\to 0} \dfrac{|R(y,x)|}{|y-x|} = 0$

L_x 称 f 在 x 的微分，记为 df_x

f 在 x 可微，$df_x \in L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ 在向量 $h \in \mathbb{R}^n$ 的取值

$$df_x(h) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+th)-f(x)}{t}$$

记 $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = df_x(e_i)$，$h = \sum_{i=1}^{n} h_i e_i$，则

$$df_x(h) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

设 $x = (x_1, \cdots x_n)$，则 f 在 x 处微分表示为

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

定理

f 在 x 可微 ⟺ f 每个分量在 x 可微

$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$ ，$f_i(x+h)-f_i(x) = df_i(h) + R_i(x,y)$

$$f(x+h)-f(x) = \begin{pmatrix} df_1 \\ \vdots \\ df_m \end{pmatrix}(h) + \begin{pmatrix} R_1(x,y) \\ \vdots \\ R_m(x,y) \end{pmatrix}$$

复合：

$$d(g\circ f)_x = dg_{f(x)} \circ df_x$$

$Jf(x)$ 和 df_x 略有区别

$$J(g\circ f)_x(x) = Jg(f(x))\,Jf(x)$$

$df_x = Jf(x)\cdot dx$

拟微分中值定理

1° $f \in C[a,b]$，f 在 (a,b) 可微，则 $\exists\ t_0 \in (a,b)$

$|f(b) - f(a)| \leq (b-a)|f'(t_0)|$

2° $E \subset \mathbb{R}^n$，E 凸，$f: E \to \mathbb{R}^m$ 可微，$\forall x, y \in E$，$\exists \xi \in E$，

s.t. $|f(y) - f(x)| \leq \|df(\xi)\| \cdot |y-x| = \|Jf(\xi)\| \cdot |y-x|$

3°（推论）

$D \subset \mathbb{R}^n$ 连通，$df = 0$，$x \in D$，$f = \text{const}$.

隐映射定理

$f: M \subset \mathbb{R}^{n+m} \mapsto \mathbb{R}^m$，$M$ 开，f C^1，对于 $(x^0, y^0) \in M$，

$f(x^0, y^0) = 0$，记 $A = df(x^0, y^0)$，若 $A_y \in L(\mathbb{R}^n)$ 可逆，

则存在 (x^0, y^0) 的邻域 $U \subset M$，x^0 邻域 $W \subset \mathbb{R}^n$，满足：

1、$\forall x \in W$，存在唯一 y，$(x, y) \in U$，$f(x, y) = 0$

2. 若将 y 定义为 $\varphi(x)$，则 $\varphi: W \to \mathbb{R}^m$ 是 C^1 映射，满足 $\varphi(x^0) = y^0$，$f(x, \varphi(x)) = 0$，$\forall x \in W$，且

$$d\varphi(x) = -[df_y(x, \varphi(x))]^{-1} \circ df_x(x, \varphi(x))$$

$$\begin{cases} f_1(x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots y_m) = 0 \\ \quad \vdots \\ f_m(x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots y_m) = 0 \end{cases}$$

1° $m = 1$ 时，$f(x_1 \cdots x_n, y) = 0$，$\frac{\partial f}{\partial y}(x^0, y^0) \neq 0$，不妨大于 0

在 (x^0, y^0) 邻域 U 内，有 $\frac{\partial f}{\partial y} > 0$，

$f(x^0, y^0-\beta) < f(x^0, y^0) = 0 < f(x^0, y^0+\beta)$

$\exists\, \alpha$, $f(x, y^0-\beta) < 0$, $f(x, y^0+\beta) > 0$, $\forall\, x \in B(x^0, \alpha)$,

其中，α, β 充分小 s.t. $B(x^0, \alpha) \times B(y^0, \beta) \subset U$

对 $x \in B(x^0, \alpha)$，$\exists\, y \in B(y^0, \beta)$，s.t. $f(x, y) = 0$，

这样的 y 唯一，记 $y = \varphi(x)$，$x \in B(x^0, \alpha)$

$f(x, \varphi(x)) - f(x^0, y^0) = df(x^0, y^0)\,(x-x^0, \varphi(x)-y^0) + R(x)$

$= d_x f\,(x-x^0) + d_y f\,(\varphi(x)-y^0) + R(x)$

其中，$\lim\limits_{x \to x^0} \frac{|R(x)|}{|x-x^0|} = 0$

故 $\varphi(x) - y_0 = -(d_y f)^{-1} d_x f\,(x-x^0) - R'(x)$

$\lim\limits_{x \to x^0} \frac{|R'(x)|}{|x-x^0|} = 0$

故 φ 在 x^0 可微，类似可得 φ 在 $B(x^0, \alpha)$ 可微

$m=1$ 情形得证

2° 对 m 归纳，设 m 阶时成立，$m+1$ 阶时，

不妨 $d_y f$ 的 m 阶顺序主子式可逆，则：

$\exists\, (x^0, y^0)$ 邻域 U，(x^0, y^0_{m+1}) 邻域 W，$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_m \end{pmatrix}$

$$\text{s.t.} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1(x_1 \cdots x_n, y_{m+1}) \\ \vdots \\ \varphi_m(x_1 \cdots x_n, y_{m+1}) \end{pmatrix}$$

$$d\varphi = -\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ & \vdots & \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \frac{\partial f_1}{\partial y_{m+1}} \\ & \vdots & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} & \frac{\partial f_m}{\partial y_{m+1}} \end{pmatrix}$$

$$g(x_1 \cdots x_n, y_{m+1}) = f_{m+1}(x_1 \cdots x_n, \varphi_1 \cdots \varphi_m, y_{m+1}) = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial y_{m+1}} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_{m+1}}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_{m+1}} + \frac{\partial f_{m+1}}{\partial y_{m+1}}$$

$$= -\left(\frac{\partial f_{m+1}}{\partial y_1} \cdots \frac{\partial f_{m+1}}{\partial y_m}\right) \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ & \vdots & \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_{m+1}} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_{m+1}} \end{bmatrix} + \frac{\partial f_{m+1}}{\partial y_{m+1}}$$

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} & \frac{\partial f_1}{\partial y_{m+1}} \\ & & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m} & \frac{\partial f_m}{\partial y_{m+1}} \\ \frac{\partial f_{m+1}}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_{m+1}}{\partial y_m} & \frac{\partial f_{m+1}}{\partial y_{m+1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \alpha \\ \beta & c \end{pmatrix}$$

$\frac{\partial g}{\partial y_{m+1}} = c - \beta A^{-1}\alpha$，因 $J \begin{bmatrix} I & -A^{-1}\alpha \\ & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ \beta & c-\beta A^{-1}\alpha \end{bmatrix}$

故 $c - \beta A^{-1}\alpha \neq 0$，

$\exists \varphi_{m+1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，$y_{m+1} = \varphi_{m+1}(x_1 \cdots x_n)$，s.t. $g(x, \varphi_{m+1}(x)) = 0$，将 φ_{m+1} 替换 $\varphi_1 \cdots \varphi_m$ 中的 y_{m+1} 得新 $\varphi_1 \cdots \varphi_m$，故 $\exists \varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m+1}$，$\varphi$ 是 C^1 $f(x, \varphi(x)) = 0$，

逆映射定理

$f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$，$C^1$，$A$ 开，$x^0 \in A$，$y^0 = f(x^0)$

df_{x^0} 可逆，则，

1° $\exists\ U \ni x^0$，开，$V \ni y^0$，开，s.t. f 在 (U, V) 上的限制映射是一一对应，可定义 $g = f^{-1}$

2° g C^1，$dg_y = (df_{g(y)})^{-1}$

证法一、利用隐映射定理

$F(x,y) = y - f(x)$，$F(x^0, y^0) = 0$，

$d_y F = I$，$d_x F = -d_x f$ 可逆，$\exists \varphi$ C^1

$x = \varphi(y)$，s.t. $\varphi(y^0) = x^0$，

$G(y) = F(\varphi(y), y) = 0 \Rightarrow d_y G = 0$

$d_x F \circ d_y \varphi + d_y F = 0,$

$d_y \varphi = -(d_x F)^{-1} = (d_x f)^{-1} = (d_{\varphi(y)} f)^{-1}$

证法二、 类似隐映射定理

定理

$A \subset \mathbb{R}^n$，开，$f: A \to \mathbb{R}^n$，C^1，$\forall x \in A$，df_x 可逆，则 f 是开映射，若 f 还是单射，则 f 是 A 到 $f(A)$ 的同胚

秩定理

$f: M \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$，$C^1$，$f$ 在 M 上秩为 r ($\mathrm{rank}\, d_x f = r$)

$x^0 \in M$，$y^0 = f(x^0)$，存在 x^0 邻域 U_1，y^0 邻域 V_1，

C^1 同胚 $\varphi: U_1 \to U \subset \mathbb{R}^m$，$\psi: V_1 \to V \subset \mathbb{R}^n$，s.t.

$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}: U \to V$，且

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} = \begin{bmatrix} \mathrm{Id}_r \\ 0 \end{bmatrix}$$

证明：设

$$f(x_1 \cdots x_m) = \begin{bmatrix} f_1(x_1 \cdots x_m) \\ \vdots \\ f_n(x_2 \cdots x_m) \end{bmatrix}$$

不妨 $\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_r} \\ & \vdots & \\ \frac{\partial f_r}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_r}{\partial x_r} \end{bmatrix}_{x=x^0}$ 可逆

否则，交换 f_i, f_j 位置及 x_i, x_j 位置

考虑 φ : $\begin{cases} u_i = \varphi_i(x_1 \cdots x_m) = f_i(x_1 \cdots x_m) & , i = 1, \cdots, r \\ u_i = \varphi_i(x_1 \cdots x_m) = x_i , & i = r+1, \cdots, m \end{cases}$

因 $J(f \circ \varphi^{-1}) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ * & A \end{pmatrix}$, 故 $A = 0$, $k \geq r+1$,

$f_k \circ \varphi^{-1}(u_1 \cdots u_m)$ 只与 $u_1 \cdots u_r$ 有关, 记为 $f_k \circ \varphi^{-1}(u_1 \cdots u_r)$.

ψ : $\begin{cases} v_i = \psi_i(y_1 \cdots y_m) = y_i & , i \leq r \\ v_i = \psi_i(y_1 \cdots y_m) = y_i - (f_i \circ \varphi^{-1})(y_1 \cdots y_r) & , i > r \end{cases}$

φ, ψ 均为 C^1 同胚, 且 $(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(u_1 \cdots u_m) = (u_1 \cdots u_r, 0 \cdots)$

$$J_x f = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} ,$$

$$\begin{bmatrix} I & \\ -A_3 A_1^{-1} & I \end{bmatrix} J_x f \cdot \begin{bmatrix} I & -A_1^{-1} A_2 \\ & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & \\ & A_4 - A_3 A_1^{-1} A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & \\ & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I & \\ -A_3 A_1^{-1} & I \end{bmatrix} J_x f \begin{bmatrix} A_1^{-1} & -A_1^{-1} A_2 \\ & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & \\ & 0 \end{bmatrix}$$

故我们构造 φ, s.t.

$$J_x \varphi = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & -A_1^{-1} A_2 \\ & I \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ & I \end{bmatrix}$$

以及 ψ, s.t.

$$J_y \psi = \begin{bmatrix} I & \\ -A_3 A_1^{-1} & I \end{bmatrix}$$

曲面

图 Φ 是 $\mathbb{R}^m$ 一开集 U 上的 $n-m$ 维 C^1 函数,

$\Gamma(\phi) = \{(x, \phi(x)) : x \in U\}$ 称为 ϕ 的图.

曲面

$\mathbb{R}^n$ 的子集 M 称为 m 维 C^1 曲面，若 $\forall x \in M$，$\exists$ x 在 $\mathbb{R}^n$ 中的邻域 V，$M \cap V$ 可表示为一个定义在 m 维开球 $U \subset \mathbb{R}^m$ 上的 C^1 映射的图

定理

$W \subset \mathbb{R}^n$，开，$F = (f_1 \cdots f_{n-m}) : W \to \mathbb{R}^{n-m}$ 是 C^1 的，$\operatorname{rank} F \equiv n-m$，则

$$M = \{x \in W : F(x) = 0\}$$

是 m 维 C_1 曲面（若 M 非空）

切空间

$M \subset \mathbb{R}^n$ 是 M 维曲面，$x \in M$，x 处切空间定义为

$$T_x M = \{M\text{上过 } x \text{ 的曲线在 } x \text{ 处的切向量}\}$$

定理

M 是 m 维 C^1 曲面，则 $T_x M$ 是 m 维的，$\forall x \in M$

$M = \{(u, \phi(u)) : u \in U \subset \mathbb{R}^m\}$，则 $T_x M = \{(v, d_x\phi(v)) : v \in \mathbb{R}^m\}$

等值面

$f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，$C^1$，$S(f) = \{x : f(x) = f(x^0)\}$ 是 $n-1$ 维曲面，

$T_x S(f) = \{v \in \mathbb{R}^n : \langle v, \nabla f(x) \rangle = 0\}$

定理

$F = (f_1 \cdots f_{n-m})$，$\operatorname{rank} F = n-m$，若 $\exists x^0$，$F(x^0) = 0$，则

$$M = \{x \in W : F(x) = 0\}$$

的切空间为 $T_x M = \{v : dF_x(v) = 0\}$

由 $F(x_1 \cdots x_n) = 0$，得 $\begin{cases} x_{m+1} = \varphi_{m+1}(x_1 \cdots x_m) \\ \cdots \\ x_n = \varphi_n \quad (x_1 \cdots x_m) \end{cases}$

$M = \{(x_1 \cdots x_m \ \ \varphi_{m+1} \cdots \varphi_n) : (x_1 \cdots x_m) \in U\}$

切向量可表示成

$(u, J\varphi(u)) = (u, -(dF_{x_{m+1} \cdots x_n})^{-1} dF_{x_1 \cdots x_m}(u))$

记 $dF_x = (A \ B)$

$(u, J\varphi(u)) = (u, -B^{-1}Au)$，

$T_x M = \{(u, -B^{-1}Au) : u \in \mathbb{R}^m\} = \{v : (A\ B)v = 0\}$

条件极值

定理

W是$\mathbb{R}^n$开子集，$f: W \to \mathbb{R}$，M是W内的m维曲面，$x^0 \in M$ 是$f|_M$极值点，且$\nabla f(x^0) \neq 0$，则

$$T_{x^0} M \subset T_{x^0} S(f)$$

其中，$S(f) = \{x \in W, f(x) = f(x^0)\}$

$v \in T_{x^0} M$，$\gamma(t)$是M上曲线，$\gamma(0) = x^0$，$\gamma'(0) = v$，

$f \circ \gamma(t)$在$t=0$处取极值，故 $0 = \frac{d}{dt} f \circ \gamma(t)\big|_{t=0}$

$\Rightarrow \langle v, \nabla f(x^0) \rangle = 0$，$v \in T_{x^0} S(f)$

Lagrange 乘数法

W是$\mathbb{R}^n$开集，$f: W \to \mathbb{R}$，C^1，$G = (g_1 \cdots g_m): W \to \mathbb{R}^m$，$C^1$，
$x^0 \in W$，$G(x^0) = 0$，$\operatorname{rank} G|_{x^0} = m$

若x^0是f在$M = \{x \in W : G(x) = 0\}$上的极值点，则$\exists$
$\lambda^0 = (\lambda_1^0 \cdots \lambda_m^0) \in \mathbb{R}^m$，$(x^0, \lambda^0)$是

$$H(x, \lambda) = f(x) + \langle \lambda, G(x) \rangle$$

的驻点

if $\nabla f(x^0) = 0$，则$\lambda^0 = 0$满足条件

下设$\nabla f(x^0) \neq 0$，

依题意，在x^0邻域内，M是$n-m$维曲面，

$S(f) = \{x : f(x) = f(x^0)\}$是$n-1$维曲面，故有

$$T_{x^0} M \subset T_{x^0} S(f)$$

考虑正交补，有

$$\nabla f(x^0) \in \operatorname{Span}\{\nabla g_1(x^0), \nabla g_2(x^0), \cdots \nabla g_m(x^0)\}$$

$\exists \lambda_1^0 \cdots \lambda_m^0$, s.t.

$$\nabla f(x^0) = -\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^0 \nabla g_i(x^0)$$

故(x^0, λ^0)是$H(x, \lambda)$的驻点

Chapter 18 Riemann 积分

$D \subset \mathbb{R}^2$，分割$\Pi = \{I_{ij} : I_{ij} = [a_i, a_{i+1}] \times [b_j, b_{j+1}],\ i, j \in \mathbb{Z}\}$，

$\cdots < a_{-2} < a_{-1} < a_0 < a_1 < \cdots, \quad \cdots < b_{-1} < b_0 < b_1 < \cdots$

$$\sigma_\pi^+(D) := \sum_{\substack{I_{ij} \in \pi \\ I_{ij} \cap D \neq \phi}} \sigma(I_{ij}), \quad \sigma_\pi^-(D) = \sum_{\substack{I_{ij} \in \pi \\ I_{ij} \subset D}} \sigma(I_{ij})$$

Jordan 可测

D Jordan 可测

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon, \exists$ 分割 π, $\sigma_\pi^+(D) - \sigma_\pi^-(D) < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon, \exists \delta, \forall \|\pi\| < \delta, \sigma_\pi^+(D) - \sigma_\pi^-(D) < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \quad \sigma(\partial D) = 0$

性质 1° 单调 $D_1 \subset D_2$, $\sigma^+(D_1) < \sigma^+(D_2)$

2° $\sigma^+(D_1 \cup D_2) \leq \sigma^+(D_1) + \sigma^+(D_2)$

3° D_1、D_2 可测，则 $D_1 \cup D_2$, $D_1 \cap D_2$, D_1 / D_2 可测

4° D_1、D_2 可测，$D_1^\circ \cap D_2^\circ = \phi$，则

$$\sigma(D_1 \cup D_2) = \sigma(D_1) + \sigma(D_2)$$

定理 对于 π 为 $\mathbb{R}^2$ 中有界区域 D 的分割，记 $A = \bigcup_{\substack{I \in \pi \\ I \subset D}} \partial I$

$\forall \varepsilon$, $\exists \delta$，对 $\|\pi_1\| < \delta$，有 $\sum_{\substack{I_{kl} \in \pi_1 \\ I_{kl} \cap A \neq \phi}} \sigma(I_{kl}) < \varepsilon$

事实上，对 $\forall A$ 满足 $\sigma(A) = 0$，以上结论成立

Riemann 积分

定义1. $\pi = \{I_{kl}\}$ 是分割，f 是有紧支集的函数，

$$M_{kl}(f) = \sup_{P \in I_{kl}} f(P), \quad m_{kl}(f) = \inf_{P \in I_{kl}} f(P)$$

$$\underline{S}(f) = \sup_{\pi} \underline{S}_\pi(f) = \sup_{\pi} \sum_{I_{kl} \in \pi} m_{kl}(f) \sigma(I_{kl})$$

$$S(f) = \inf_{\pi} \bar{S}_\pi(f) = \inf_{\pi} \sum_{I_{kl} \in \pi} M_{kl}(f) \sigma(I_{kl})$$

$$\underline{S}(f) = \bar{S}(f)$$

定义2. $\exists a \in \mathbb{R}$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta$, $\forall \|\pi\| < \delta$, $\forall \xi_{kl} \in I_{kl}$，有

$\left| \sum_{I_{kl} \in \pi} f(\xi_{kl}) \sigma(I_{kl}) - a \right| < \varepsilon$，

定义3、 D可测，$\operatorname{supp} f \subset D$，$\exists a \in \mathbb{R}$，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，s.t.

对D任意有限剖分 $T = \{D_j : D = \bigcup_j D_j,\ D_j^\circ \cap D_k^\circ = \phi\}$

$\|T\| = \max_j \sup\{|x-y| : x, y \in D\} < \delta$，有

$|\sum_j f(\xi_j)\sigma(D_j) - a| < \varepsilon$，$\forall \xi_j \in D_j$

定理： 以上定义等价

1 ⟺ 2，3 ⟹ 1 易得

2 ⟹ 3 可利用对给定 $D = \{D_i\}$，$\sigma(\bigcup_i \partial D_i) = 0$

定理 $D_1 \subset D_2 \subset \cdots D_n \subset \cdots$，$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$，$D_i, D$ 均可测

则 $\sigma(D) = \lim_{n\to\infty} \sigma(D_n)$

振幅 $\omega_f(P) = \lim_{r\to 0^+} \omega_f(P, r) = \lim_{r\to 0^+} \sup\{|x-y| : x, y \in B(P, r)\}$

$D_\delta(f) = \{P \in D \mid \omega_f(P) \geq \delta\}$

$D_\delta(f)$ 闭

定理 D紧，若 $\omega_f(P) < \varepsilon$，$\forall P \in D$，则 $\exists \delta$，$\forall x, y$，$|x-y| < \delta$，有 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$

定理 D可测，紧，f在D有界，f在D上Riemann可积

⟺ $\forall \delta > 0$，$D_\delta(f)$ 是Jordan零测的

⟺ $\forall \delta > 0$，$D_\delta(f)$ 是Lebesgue零测的

（E是Lebesgue零测 ⟺ $\forall \varepsilon$，$\exists I_n$，$E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_n$，$\sum_{i=1}^{\infty} \sigma(I_n) < \varepsilon$）

定理 E紧致，则 E Jordan零测 ⟺ E Lebesgue零测

重积分换元公式

体积 $\mathbb{R}^n$ 中 n个向量 $v_1 \cdots v_n$，生成一个平行多面体

$$\Delta(v_1 \cdots v_n) = \{x = \sum_{i=1}^{n} t_i v_i : t_i \in [0,1]\}$$

定义其体积为 $\sigma(v_1 \cdots v_n) = \det(v_1 \cdots v_n)$

定理 $D \subset \mathbb{R}^n$，可测，$\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^n)$，$\mathcal{A}$ 在 $(e_1 \cdots e_n)$ 下矩阵为 A，

A 可逆，则 $\mathcal{A}(D)$ 可测，且

$$\sigma(\mathcal{A}(D)) = |\det(A)|\,\sigma(D)$$

对 $I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$，$\sigma(\mathcal{A}(I)) = |\det A|\,\sigma(I)$

定理 $U \subset \mathbb{R}^n$，开，$\varphi: U \to \mathbb{R}^n$，$C^1$，$\sup \|d\varphi\| < +\infty$，则

1° 若 $E \subset U$ 有界，则 $\varphi(E)$ 有界，$\exists\ C = C(n, \sup\|d\varphi\|)$，s.t.

$$\sigma^+(\varphi(E)) \le C\,\sigma^+(E)$$

只用证 $E = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ 情形，

$\forall x, y \in E$，$|\varphi(x) - \varphi(y)| < \sup\limits_{E} \|d\varphi\| \cdot |x-y|$

2° $D \subset U$ 可测，$D^\circ \neq \phi$，$\det(d\varphi) \neq 0$ in D，则 $\varphi(D)$ 可测

若 $x_n \to x$，$\varphi(x_n) \to y \in \partial\varphi(D)$，

则 $y = \varphi(x)$，又 φ 是开映射，且一一对应，$x \in \partial D$，

故 $\partial\varphi(D) \subset \varphi(\partial D)$

定理 $\varphi: U' \to U$，$\bar{u} \in U'$，定义 $\varphi_1(u) = \varphi(\bar{u}) + d\varphi(\bar{u})(u - \bar{u})$

$D' \subset U'$，紧，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，$\forall \bar{u} \in D'$，s.t

1° 立方体 $I_\delta(\bar{u}) = \{x : \|x - \bar{u}\|_\infty < \delta\} \subset U'$，且 $\forall u \in I_\delta(\bar{u})$

$$\|(d\varphi(\bar{u}))^{-1} \cdot (\varphi(u) - \varphi_1(u))\|_\infty < \varepsilon \|u - \bar{u}\|_\infty$$

$$\phi(u) = (d\varphi(\bar{u}))^{-1}(\varphi(u) - \varphi_1(u))$$

$$|\phi(u)| \le \|d\phi(\xi)\| \cdot |u-\bar{u}|$$

$$\le \|(d\varphi(\bar{u}))^{-1}\| \cdot \|d\varphi(\xi) - d\varphi(\bar{u})\| \cdot |u-\bar{u}|$$

利用 $\|\alpha\|_\infty \le |\alpha| < \sqrt{n}\|\alpha\|_\infty$ 即可

2° ε 充分小时，$\exists\ C = C(n)$, s.t.

Jacobi 矩阵的 det
↓

$$|\sigma(\varphi(I_\delta(\bar{u}))) - J(\bar{u})\sigma(I_\delta(\bar{u}))| \le C \cdot J(\bar{u})\sigma(I_\delta(\bar{u}))\varepsilon$$

$\psi = (d\varphi(\bar{u})^{-1}) \circ \varphi$

$\psi(u) - \psi(\bar{u}) = \phi(u) + (u-\bar{u})$

故 $\big|\, \|\psi(u) - \psi(\bar{u})\|_\infty - \|u-\bar{u}\|_\infty \big| \le \varepsilon\|u-\bar{u}\|_\infty$

又 $\|u-\bar{u}\|_\infty \le \delta$，故 $\|\psi(u) - \psi(\bar{u})\| \le (1+\varepsilon)\delta$

$$\psi(I_\delta(\bar{u})) \subset I_{(1+\varepsilon)\delta}(\psi(\bar{u}))$$

$u_0^* = \psi(u_0) \in \partial\psi(I_\delta(\bar{u}))$，则 $u_0 \in \partial(I_\delta(\bar{u})$

$\|u_0^* - \psi(\bar{u})\| = \|\psi(u_0) - \psi(\bar{u})\| \ge (1-\varepsilon)\delta$，故

$$\psi(I_\delta(\bar{u})) \supset I_{(1-\varepsilon)\delta}(\psi(u))$$

后略

定理 $\varphi: U' \to U$，可延拓至 $\bar{U}'$ 上 C^1 映射，U' 可测，则